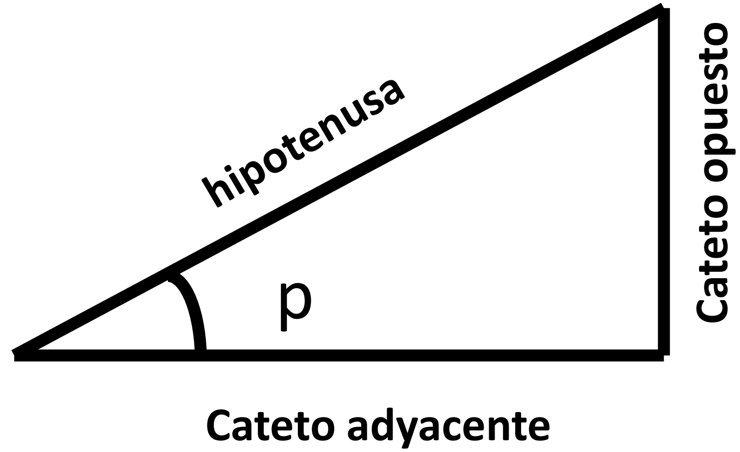
TANGENTE DE ANGULOS PEQUEÑOS

Dr. José Antonio García Barreto
Investigador Titular B
Instituto de Astronomía,
Universidad Nacional Autónoma de México

Material didáctico para el curso ***Astrofísica General*** a nivel licenciatura para estudiantes de física.

Ciudad Universitaria, Marzo de 2020

Para ángulo grandes, la funciones trigonométricas ***tangente, seno y coseno*** se definen como:



$$\tan(p) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad \text{ecuación (1)}$$

$$\text{sen}(p) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \text{ecuación (2)}$$

$$\cos(p) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad \text{ecuación (3)}$$

De la expresión (2): cateto opuesto $= hipotenusa \quad sen(p) \quad (4)$

De la expresión (3): cateto adyacente $= hipotenusa\ cos(p) \quad (5)$

Substituyendo expresión (4) y expresión (5) en (1):

$$\tan(p) = \frac{hipotenusa}{hipotenusa} \frac{sen(p)}{\cos(p)} \tag{6}$$

Sabemos de los cursos de álgebra que el cociente de una cantidad entre sí misma es igual a la unidad. Por lo tanto

$$\tan(p) = \frac{sen(p)}{\cos(p)} \tag{7}$$

Nótese que las funciones seno, coseno, y tangente de un ángulo grande dan valores numéricos ***sin unidades,*** por ejemplo de (4), las unidades lineales del cateto opuesto son las mismas que las dimensiones lineales de la hipotenusa.

Para ángulos muy pequeños las funciones sen(p) y cos(p) se pueden expresar en una serie de Taylor:

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)\frac{df(p)}{dp}\Big|_{p=p_0} + \frac{1}{2!}(p - p_0)^2\frac{d^2f(p)}{dp^2}\Big|_{p=p_0} + \cdots \quad (8)$$

Para el caso donde $p_0 = 0$, se tiene para sen(p)

$$sen(p) = p\frac{d\,sen(p)}{dp}\Big|_{p=0} + \frac{1}{2!}\,p^2\frac{d^2sen(p)}{dp^2}\Big|_{p=0} + \frac{1}{3!}\,p^3\frac{d^3sen(p)}{dp^3}\Big|_{p=0} \quad (9)$$

En el límite cuando $p \to 0$, $\quad p^3 \ll p^2 \ll p$, (10)

(9) se puede escribir:

$$\lim_{p\to 0} sen(p) = p\frac{d\,sen(p)}{dp}\Big|_{p=0} \quad (11)$$

Pero, sabemos que

$$\frac{d\, sen(p)}{dp} = \cos(p) \tag{12}$$

De tal manera que

$$\frac{d\, sen(p)}{dp}\Big|_{p=0} \equiv \cos(p)\Big|_{p=0} = 1 \tag{13}$$

Substituyendo (13) en (11), tenemos finalmente

$$\lim_{p\to 0} sen(p) = p \tag{14}$$

Similarmente la serie de Taylor para la función $\cos(p)$ tomando en cuenta la expresión (10) es:

$$\lim_{p \to 0} \cos(p) = \cos(p = 0) \tag{15}$$

$$\lim_{p \to 0} \cos(p) = 1 \tag{16}$$

Podemos reescribir la expresión (7) para la tangente como

$$\lim_{p \to 0} \tan(p) = \frac{\lim_{p \to 0} sen(p)}{\lim_{p \to 0} \cos(p)} \tag{17}$$

Finalmente substituyendo las expresiones (14) y (16) en la expresión (17) se tiene:

$$\boxed{\lim_{p\to 0} \tan(p) = p}$$

Pero ***p*** es un ángulo, y para utilizarlo en expresiones matemáticas con variables que tienen unidades, por ejemplo de longitud, ***p*** deberá forzosamente **expresarse en radianes**

Recordar que ***π radianes* = $\mathbf{180^{\circ} \times \frac{60'}{1^{\circ}} \times \frac{60''}{1'}}$**

$$\boxed{\text{Finalmente } 1'' = \frac{\pi}{180\times 60\times 60}\ \textbf{radianes}}$$